1η βιντεοδιάλεξη | 5/10/2020

→ Ποιο είναι το αντικείμενο του μαθήματος?

• Συναρτήσεις περισσοτέρων ανεξάρτητων ή εξαρτημένων πραγματικών αριθμών, δηλ. έχουμε συναρτήσεις (απεικονίσεις) : $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_i \in \mathbb{R}$ συντεταγμένες του διανύσματος $\bar{x}$, $n \geq 2$
n: φυσικός

$m, n \in \mathbb{N} = \{ n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}\}$

$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \to \bar{f}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^m$

Εδώ το $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή (όρισμα) πρότυπο, αντίστροφη εικόνα και $\bar{f}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^m$ είναι η εξαρτημένη μεταβλητή ή η εικόνα του ορίσματος $\bar{x}$ κάτω από τη συνάρτηση $\bar{f}$
υπό

→ Τα $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ βρίσκονται σε ένα $D \subset \mathbb{R}^n$ (υποσύνολο) το πεδίο ορισμού της $\bar{f}$: $\boxed{\bar{f} : D \to \mathbb{R}^m}$

• Το $\mathbb{R}^m$ είναι το πεδίο τιμών της $\bar{f}$

• Το $\bar{f}(D) \subset \mathbb{R}^m$ είναι το σύνολο τιμών της $\bar{f}$ ή η εικόνα της $\bar{f}$

→ Τι εννοούμε "θα ασχοληθούμε" με τέτοιες συναρτήσεις?

Θα εξετάσουμε : όρια, συνέχεια, διαφορισιμότητα και διάφορες σχετικές έννοιες (ΑΠΕ13) και ολοκλήρωση τέτοιων συναρτήσεων (ΑΠΕ14)

Ουσιαστικά: κάναμε "τα ίδια" όπως στην Ανάλυση, στο σχολείο, στο πρώτο έτος, αλλά για γενικεύσεις των συναρτήσεων που γνωρίζουμε έως τώρα. (δηλ. $n = m = 1$)

Αυτό έχει όμως διάφορες επιπτώσεις :
Ο σημαντικότερος λόγος : το $\mathbb{R}$ έχει διάταξη ενώ το $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ δεν έχει, συνεπώς:

Ειδικές περιπτώσεις:

1) $n = m = 1$: $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ $(= \mathbb{R}^1)$ ΑΠΕΙ1, ΑΠΕΙ2, σχολείο

2) $n \geq 2$, $m = 1$: $D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$, πραγματική συνάρτηση n ανεξάρτητων πραγματικών μεταβλητών
[ΑΥΤΟΣ ΕΙΝΑΙ Ο ΠΥΡΗΝΑΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ]

3) $n = 1$, $m \geq 2$: $I \subset \mathbb{R}$, διάστημα, $f: I \to \mathbb{R}^m$ συνεχής και ονομάζονται παραμετρικές καμπύλες στον $\mathbb{R}^m$

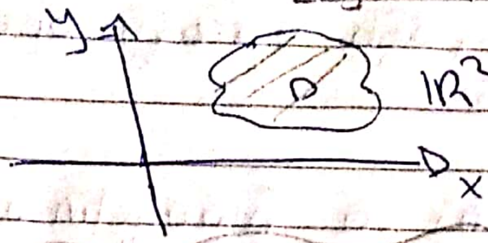
4) $n = m \geq 2$: $D \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ και ονομάζονται διανυσματικά πεδία
[ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ ΙΔΙΩΣ ΣΤΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ]

5) $n, m \geq 2$: $D \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και ονομάζονται διανυσματικές συναρτήσεις

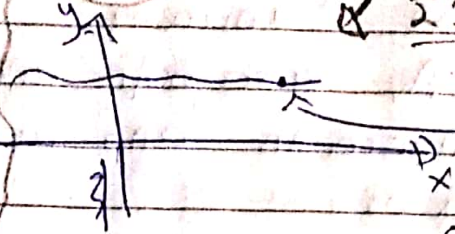
Παράδειγμα: (Για το 2) : $n = 2$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $f: D \to \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση δύο (ανεξάρτητων, πραγματικών) μεταβλητών. Το $f(x,y) \in \mathbb{R}$ μπορεί να ειδωθεί ως το ύψος ενός βουνού στο σημείο $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$

Παρατήρηση: Αν $n = 2$ γράφαμε συνήθως $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ αντί για $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$, αντίστοιχα αν $n = 3$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ αντί για $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}$

!!! Προσοχή !!!



$\mathbb{R}^2$ ← ΕΔΩ ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΤΟ ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΗΣ f, ΟΧΙ ΤΟ ΓΡΑΦΗΜΑ



ΣΧΟΛΕΙΟ !!

$y = f(x)$ $[\in \mathbb{R}]$

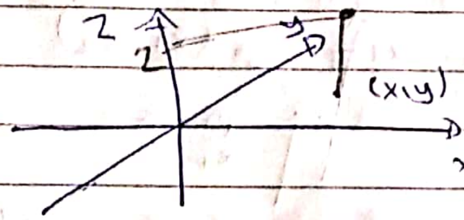
$(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ και μάλιστα:

$(x, f(x)) \in \Gamma_f : \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in D \subset \mathbb{R} \}$

του γραφήματος της $f : D \to \mathbb{R}$ με $D \subset \mathbb{R}$

Εδώ $[n = m = 1]$

Εμείς:

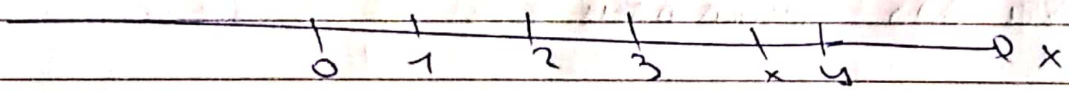


$(x, y, f(x,y)) \in \mathbb{R}^3$

(x,y): σημείο του $\mathbb{R}^2$ που αντιστοιχεί σε ύψος $z = f(x,y)$

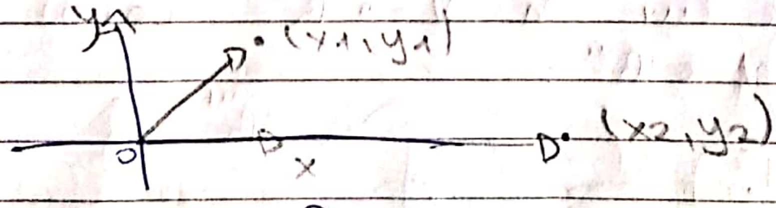
→ Τι εννοούμε όταν λέμε ότι το $\mathbb{R}$ έχει διάταξη ενώ το $\mathbb{R}^n$ $n \geq 2$ δεν έχει?

Γεωμ. αναπαράσταση!



Στο $\mathbb{R}$ υπάρχει η έννοια $x < y$ $[x_1 < x_2]$, δηλ. μπορούμε να πούμε το y μεγαλύτερο του x

$\mathbb{R}^2$:



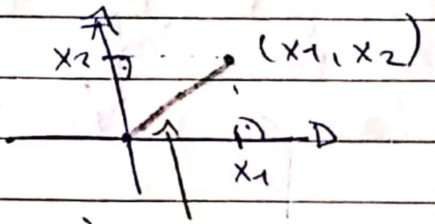
Ποιο από τα 2 διανύσματα (x_1, y_1), (x_2, y_2) είναι το μεγαλύτερο? (*) Δεν συγκρίνω τις αποστάσεις, αν συγκρίνω αποστάσεις (πόσο απέχει το καθένα απ' το (0,0)) τότε θα έχω αριθμό, άρα διάταξη, άρα θα μπορώ να τα συγκρίνω.

(*) Δεν μπορούμε να πούμε γιατί τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, δηλ. "κοιτάνε" προς διαφορετικές κατευθύνσεις. Αν εισάγουμε την έννοια της **νόρμας**, δηλ. της απόστασης από την αρχή των αξόνων ενός διανύσματος:

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\|\bar{x}\| := (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} \quad [=: \|\bar{x}\|_2]$$

Ευκλείδεια νόρμα [$n=2$:



έχει μήκος $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$
Πυθαγόρειο Θεώρημα]

Τότε μπορούμε να συγκρίνουμε διανύσματα, είναι γ.α., δηλ. "κοιτάνε" προς διαφορετικές κατευθύνσεις (ο $\mathbb{R}^2$ έχει δύο διαστάσεις)